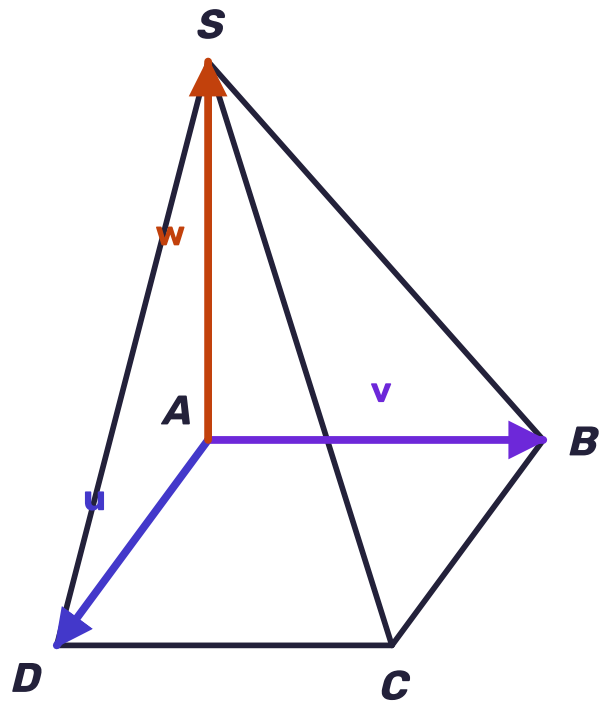
וקטורים

מצגת הסבר – וקטורים בגוף, שיעורים, מישורים, מרחקים וזוויות

מתמטיקה 5 יח"ל | שאלון 35572 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע"י עדי והבינה

מה נלמד?



שאלה 2 בשאלון בנויה בדרך כלל משני חלקים:

1. **בלי שיעורים**: מביעים וקטורים בעזרת $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$, מכפלה סקלרית, אורך וניצבות
2. **עם שיעורים**: נקודות, וקטור נורמל ו**משוואת מישור**
3. **ישר** במרחב: $\underline{x} = A + t \cdot \underline{u}$
4. **מרחק** נקודה ממישור, **זווית** בין ישר למישור או בין מישורים
5. **נפח** פירמידה בעזרת גובה = מרחק ממישור

הרעיונות החשובים

הולכים במסלול

$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} = -\underline{w} + \underline{u}$

ונקודה על קטע: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AS} + \frac{3}{4}\overrightarrow{SD}$

וקטור בין שתי נקודות: $\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AE}$

ניצבות

$\underline{a} \perp \underline{b}$ ← המכפלה הסקלרית שלהם היא 0.

מקצועות ניצבים בגוף ← $\underline{v} \cdot \underline{u}$, $\underline{w} \cdot \underline{u}$, $\underline{v} \cdot \underline{w}$ מתאפסים.

אורך = שורש של מכפלה עצמית

$$|\underline{a}|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a}$$

פותחים סוגריים כמו בכפל רגיל, ומציבים את הנתונים.

וקטור נורמל

מאונך לכל וקטור במישור. $\underline{n} = (a, b, c)$ ← המישור $ax + by + cz + d = 0$.

לזכור (לא בנוסחאון)

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • וקטורים

אורך של $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

מכפלה סקלרית:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$$

(α – הזווית בין הווקטורים)

נוסחאון • מישורים

מרחק $P(x_1, y_1, z_1)$ מהמישור $ax + by + cz + d = 0$:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

זווית β בין הישר $\underline{x} = \underline{v} + t \cdot \underline{u}$ למישור עם נורמל $\underline{n}$:

$$\sin\beta = \frac{|\underline{n} \cdot \underline{u}|}{|\underline{n}| \cdot |\underline{u}|}$$

זווית α בין שני מישורים:

$$\cos\alpha = \frac{|\underline{n_1} \cdot \underline{n_2}|}{|\underline{n_1}| \cdot |\underline{n_2}|}$$

שיטת הפתרון – וקטורים בלי שיעורים

1. מסמנים $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ על הסרטוט (מקודקוד אחד).
2. מביעים כל וקטור **במסלול** דרך מקצועות ידועים.
3. אורך: $|\underline{a}|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a}$ – פותחים סוגריים.
4. מציבים את הנתונים: מקצועות ניצבים ← מכפלה 0; $\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$.
5. משווים לנתון ופותרים את המשוואה (בדרך כלל ריבועית בפרמטר).

דוגמה

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = a$, $\underline{u} \perp \underline{v}$:

$$|2\underline{u} - \underline{v}|^2 = 4\underline{u} \cdot \underline{u} - 4\underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \underline{v}$$
$$= 4a^2 - 0 + a^2 = 5a^2$$
$$|2\underline{u} - \underline{v}| = \sqrt{5}\, a$$

שיטת הפתרון – משוואת מישור

1. מוצאים **שני וקטורים** במישור (סוף פחות התחלה).
2. $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ מאונך לשניהם ← **שתי משוואות** (מכפלה סקלרית 0).
3. משלוש נעלמות ושתי משוואות – **בוחרים** ערך לאחת מהן ומוצאים את השתיים האחרות.
4. כותבים $n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ ומציבים נקודה מהמישור כדי למצוא את d.
5. **בודקים** בנקודות האחרות.

למה זה עובד?

אם $\underline{n}$ מאונך לשני וקטורים לא מקבילים במישור, הוא מאונך למישור כולו.

אפשר לצמצם וקטור כיוון: $(6,6,3) \leftarrow (2,2,1)$ – אותו כיוון, חשבון קל יותר.

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 2

שאלת בגרות פתורה – הבעת וקטור (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

בפירמידה $SABCD$ הבסיס ריבוע, AS גובה ו־$AS = AB$. $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$. E על SD כך ש־$SE = \frac{3}{4}SD$, N על SC כך ש־$\overrightarrow{SN} = k \cdot \overrightarrow{SC}$. **א.** הביעו את $\overrightarrow{EN}$.

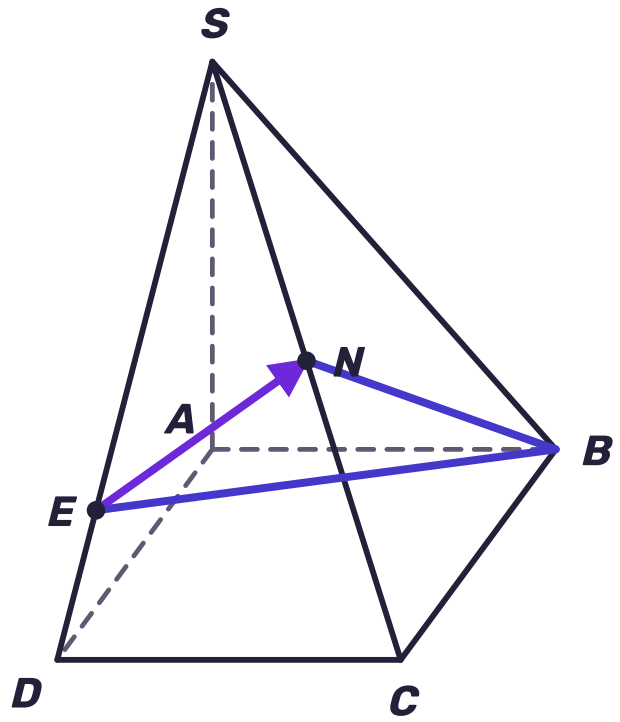
$$\overrightarrow{AE} = \underline{w} + \tfrac{3}{4}(\underline{u} - \underline{w}) = \tfrac{3}{4}\underline{u} + \tfrac{1}{4}\underline{w}$$

$\overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$ ($\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$ בריבוע):

$$\overrightarrow{AN} = \underline{w} + k(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})$$

$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AE}$:

$$\overrightarrow{EN} = \left(k - \tfrac{3}{4}\right)\underline{u} + k\underline{v} + \left(\tfrac{3}{4} - k\right)\underline{w}$$



שאלת בגרות פתורה – אורך ופרמטר (ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

ב. נתון: $|\overrightarrow{EN}| = \frac{\sqrt{6}}{4}|\underline{w}|$. מצאו את k.

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = a$, ושלושת הווקטורים ניצבים זה לזה ← כל המכפלות המעורבות הן 0, ונשארים רק הריבועים:

$$|\overrightarrow{EN}|^2 = a^2\left[\left(k-\tfrac{3}{4}\right)^2 + k^2 + \left(\tfrac{3}{4}-k\right)^2\right]$$

מהנתון $|\overrightarrow{EN}|^2 = \frac{6}{16}a^2$. מחלקים ב־$a^2$:

$$2\left(k-\tfrac{3}{4}\right)^2 + k^2 = \tfrac{3}{8}$$

$$3k^2 - 3k + \tfrac{3}{4} = 0$$

$$k^2 - k + \tfrac{1}{4} = 0$$

$$\left(k-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$k = \tfrac{1}{2}$$

N היא אמצע SC.

שאלת בגרות פתורה – משוואת המישור (ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

ג. $A(0,0,0)$, $B(0,12,0)$, $D(12,0,0)$, $S(0,0,12)$. מצאו את E ואת N, ואת משוואת המישור ENB.

מסעיף א: $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{1}{4}\underline{w} \leftarrow E(9,0,3)$. N אמצע SC, $C(12,12,0) \leftarrow N(6,6,6)$.

$$\overrightarrow{EN} = (-3,6,3), \qquad \overrightarrow{EB} = (-9,12,-3)$$

הנורמל מאונך לשניהם:

$$-3n_1 + 6n_2 + 3n_3 = 0$$
$$-9n_1 + 12n_2 - 3n_3 = 0$$

מחברים: $-12n_1 + 18n_2 = 0 \leftarrow$ בוחרים $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, ואז $n_3 = -1$.

$$3x + 2y - z + d = 0$$

מציבים $B(0,12,0)$: $24 + d = 0 \leftarrow d = -24$.

$$3x + 2y - z - 24 = 0$$

בדיקה: E: $27 + 0 - 3 - 24$ – יוצא 0 ✓

N: $18 + 12 - 6 - 24$ – יוצא 0 ✓

שאלת בגרות פתורה – השוואת נפחים (ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

ד. האם הנפח של הפירמידה $SENB$ שווה לנפח של הפירמידה $CENB$? נמקו.

לשתיהן אותו **בסיס** – המשולש ENB. לכן משווים את **הגבהים** – המרחקים של S ושל C מהמישור $3x+2y-z-24=0$:

$$d_S=\frac{|0+0-12-24|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{36}{\sqrt{14}}$$

$$d_C=\frac{|36+24-0-24|}{\sqrt{14}}=\frac{36}{\sqrt{14}}$$

הגבהים שווים ← **הנפחים שווים**.

וזה צפוי: המישור עובר דרך N – אמצע SC.

נוסחאון: נפח פירמידה $V=\frac{S\cdot h}{3}$

שאלת בגרות פתורה – מישור, מרחק וזווית

בגרות קיץ תשפ"ב (2022) – מועד א' • שאלה 2

$A(4,p,-1)$, $B(7,5,5)$, $C(1,-1,2)$, $D(-2,5,-4)$ באותו מישור.

א. מצאו את המישור $ABCD$.

$\overrightarrow{CB}=(6,6,3)$ ← $(2,2,1)$; $\overrightarrow{CD}=(-3,6,-6)$ ← $(-1,2,-2)$

$$2a+2b+c=0, \qquad -a+2b-2c=0$$

בוחרים $a=2$ ← $b=-1$, $c=-2$. מציבים C:

$$2x-y-2z+1=0$$

ד. $ABCD$ ריבוע בצלע 9 (סעיף ג), נפח $SABCD$ הוא 81 ← $\frac{81\cdot h}{3}=81$, $h=3$.

SC על הישר $\underline{x}=(0,-4,1)+t(1,3,1)$:

$$\frac{|2t-(-4+3t)-2(1+t)+1|}{\sqrt{4+1+4}}=3 \;\Rightarrow\; |1-t|=3$$

$S(-2,-10,-1)$ **או** $S(4,8,5)$

ה. המישור π מאונך ל־SC ← הנורמל שלו הוא וקטור הכיוון $(1,3,1)$. זווית בין המישורים:

$$\cos\alpha=\frac{|2\cdot1-1\cdot3-2\cdot1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{11}}=\frac{1}{\sqrt{11}}$$

$$\alpha\approx72.45^\circ$$

הערך המוחלט ← זווית חדה תמיד.

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. וקטור בין נקודות: **סוף פחות התחלה**.
2. בפתיחת $|\underline{a}|^2$ לא מוותרים על המכפלות המעורבות – מאפסים רק כשהווקטורים ניצבים.
3. $|\underline{u}|^2 = \underline{u} \cdot \underline{u}$ – לא $|\underline{u}|$.
4. אחרי מציאת המישור – **בודקים** שכל הנקודות מקיימות אותו.
5. זווית בין ישר למישור – $\sin$; בין מישורים – $\cos$.
6. במרחק עם ערך מוחלט – לרוב **שתי** תשובות.

בדיקה עצמית

1. חשבו את $|\underline{a}|$ עבור $\underline{a}=(2,-1,2)$.
2. האם $(1,2,3)$ ו־$(3,0,-1)$ ניצבים?
3. מצאו את המרחק של $P(1,1,1)$ מהמישור $2x+y-2z+8=0$.
4. מצאו את המישור דרך $(1,0,2)$ שהנורמל שלו $(3,-1,1)$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $\sqrt{4+1+4}=\mathbf{3}$
2. $3+0-3$ – המכפלה היא 0 ← **כן**
3. $\dfrac{|2+1-2+8|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{9}{3}=\mathbf{3}$
4. $3x-y+z+d=0$. מציבים את הנקודה:

   $3+2+d$ שווה 0, לכן $d=-5$:

   $$\mathbf{3x-y+z-5=0}$$