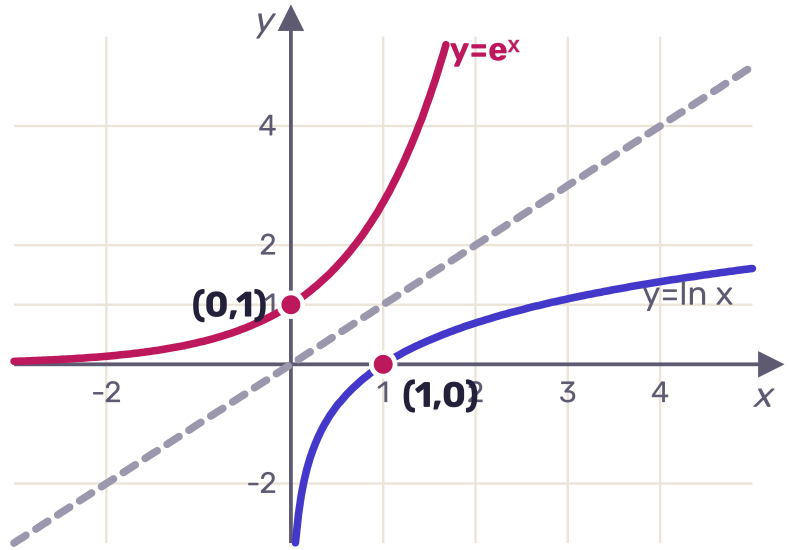
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

מצגת הסבר – חקירה של e^x ושל $\ln x$, אסימפטוטות, נגזרות ואינטגרלים

מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35572 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?



בשאלות 4–5 בשאלון חוקרים פונקציה עם e^x או עם $\ln x$:

1. **תחום הגדרה** ונקודות חיתוך עם הצירים
2. **אסימפטוטות** – אנכיות ואופקיות (לכל צד בנפרד!)
3. **נגזרת**: קיצון, עלייה וירידה, ולפעמים קעירות
4. **סקיצה**, ולפעמים גרף של פונקציה נוספת ($\frac{1}{f}$, f')
5. **שטח** בעזרת אינטגרל, ופרמטר מנתון

הרעיונות החשובים

e^x תמיד חיובי

לכל x מתקיים $e^x > 0$. לכן במכפלה עם e^x רק הגורם השני יכול להתאפס.

כאשר $x \to -\infty$: $e^x \to 0$. וגם $e^0 = 1$.

$\ln x$ רק ל־$x > 0$

תחום: מה שבתוך ה־$\ln$ חיובי. $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.

כאשר $x \to 0^+$: $\ln x \to -\infty$ ← לרוב אסימפטוטה $x = 0$.

פונקציות הפוכות

$(a > 0)\ e^x = a \ \Rightarrow\ x = \ln a$

$\ln x = b \ \Rightarrow\ x = e^b$

לזכור (לא בנוסחאון): $\ln x = \log_e x$

מי „מנצח"?

e^x גדל מהר יותר מכל פולינום, ופולינום גדל מהר יותר מ־$\ln x$.

$\frac{e^x}{e^x - 4}$ כאשר $x \to \infty$ ← מחלקים מונה ומכנה ב־e^x.

הנוסחאות מהנוסחאון – חזקות ולוגריתמים

נוסחאון • חזקות

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

למשל: $\frac{e^x-4}{e^x} = 1 - 4e^{-x} \cdot e^{2x} = (e^x)^2$

נוסחאון • לוגריתמים

$$\log_a\left(a^b\right) = b \qquad a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a\left(x^b\right) = b \cdot \log_a x$$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_c x = \frac{\log_a x}{\log_a c}$$

הנוסחאות מהנוסחאון – נגזרות ואינטגרלים

נוסחאון • נגזרות

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

עם $a = e$ (כי $\ln e = 1$):

$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u) \cdot u'(x)$

למשל: $\left(e^{2x-1}\right)' = 2e^{2x-1}$

נוסחאון • אינטגרלים

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int f(mx+b)\,dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + C$$

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + C$$

למשל: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$ $(u = \ln x)$

שיטת הפתרון – חקירה שלב אחרי שלב

1. **תחום**: מכנה שונה מ־0 (למשל $e^x \neq 4 \leftarrow x \neq \ln 4$); בתוך $\ln$ – חיובי.
2. **אסימפטוטה אנכית**: היכן שהמכנה מתאפס (והמונה לא), או $x = 0$ אצל $\ln x$.
3. **אופקית**: בודקים $x \to \infty$ ו־$x \to -\infty$.
4. **נגזרת** (מכפלה / מנה / מורכבת) ← מוציאים e^x גורם משותף ← טבלת סימנים.
5. את ה־y של הקיצון מציבים ב־f.
6. **סקיצה** לפי כל הנתונים, ובסוף **שטח**.

טריק: הצבה $t = e^x$

משוואה עם e^{2x} ו־e^x ← משוואה ריבועית ב־t:

$$e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = 4, \qquad t_2 = -1$$

$e^x > 0$ ← רק $e^x = 4$, כלומר $x = \ln 4$.

בגרות חורף תשפ"ב (2022) • שאלה 4

שאלת בגרות פתורה – תחום ואסימפטוטות

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5

נתונה $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-4}$. **א.** (1) תחום ההגדרה. (2) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(1) המכנה מתאפס כאשר $e^x=4$:

$$x\neq \ln 4$$

(2) אנכית: ב־$x=\ln 4$ המכנה 0 והמונה $4\neq 0$ ← $x=\ln 4$.

$x\to\infty$: מחלקים מונה ומכנה ב־e^x:

$$f(x)=\frac{1}{1-4e^{-x}}\to 1$$

$x\to-\infty$: המונה שואף ל־0 והמכנה ל־-4:

$$f(x)\to 0$$

$x=\ln 4$ • $y=1$ (מימין) • $y=0$ (משמאל)

שאלת בגרות פתורה – נגזרת וסקיצה

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5

(3) תחומי עלייה וירידה. **(4)** סקיצה.

כלל המנה:

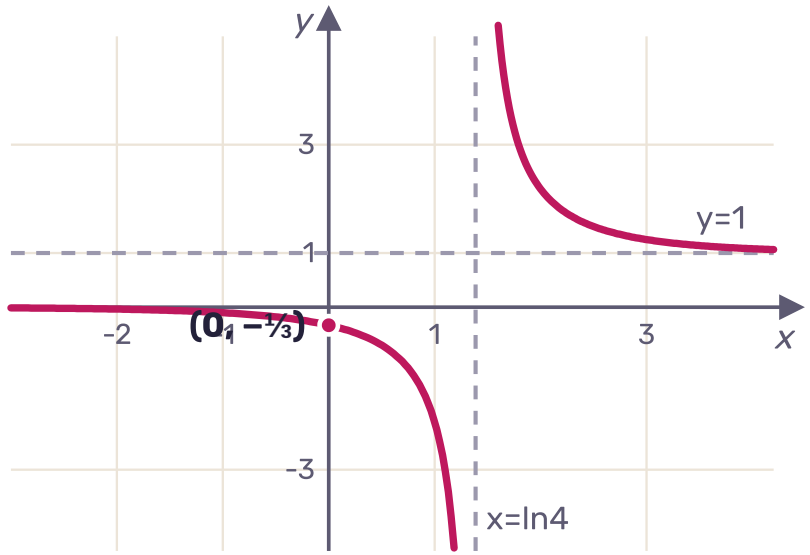
$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-4)-e^x\cdot e^x}{(e^x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-4e^x}{(e^x-4)^2}$$

המונה שלילי והמכנה חיובי ← $f'(x)<0$ בכל התחום.

יורדת ב־$x<\ln 4$ וב־$x>\ln 4$

חיתוך עם ציר y: $f(0)=\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}$



שאלת בגרות פתורה – שטח וחיתוך (ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד ב' • שאלה 5

$g(x)=\frac{1}{f(x)}$. **ב (3)** חשבו את השטח בין g, האסימפטוטה האופקית שלה והישרים $x=\ln 5$, $x=\ln 8$.

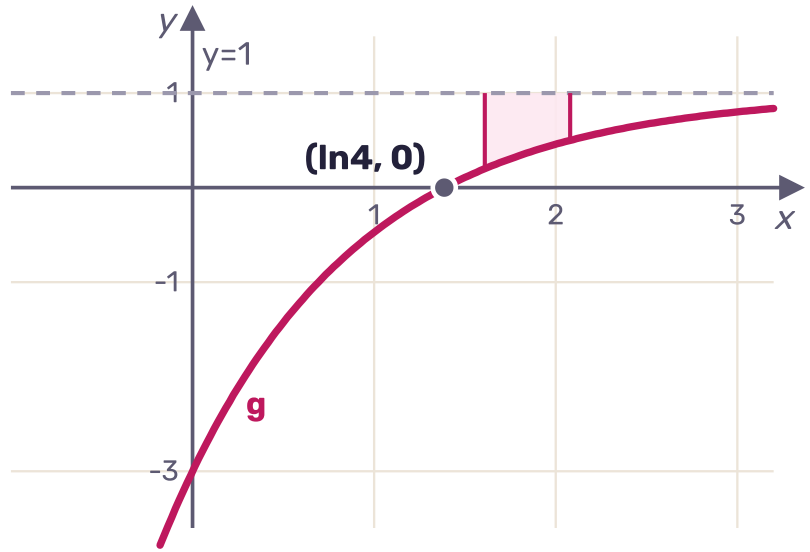
$g(x)=\frac{e^x-4}{e^x}=1-4e^{-x}$ (עם נקודה ריקה ב־$x=\ln 4$).

אסימפטוטה $y=1$, והגרף מתחתיה, לכן:

$$S=\int_{\ln 5}^{\ln 8}(1-g(x))\,dx=\int_{\ln 5}^{\ln 8}4e^{-x}dx$$

$$=\Big[-4e^{-x}\Big]_{\ln 5}^{\ln 8}=-\frac{4}{8}+\frac{4}{5}$$

$$S=0.3$$



ג. חיתוך f ו־g:

$$e^{2x}=(e^x-4)^2 \;\Rightarrow\; 8e^x=16$$

$e^x=2 \leftarrow x=\ln 2$, $f(\ln 2)=\frac{2}{2-4}$

$$(\ln 2,\ -1)$$

שאלת בגרות פתורה – פונקציה לוגריתמית

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5

נתונה $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$. **א.** (1) תחום. (2) קיצון. (3) סקיצה.

(1) $\ln x \leftarrow x>0$ (וגם המכנה שונה מ־0).

$$x>0$$

(2)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

מתאפסת ב־$x=1$: משמאל שלילית, מימין חיובית.

$$f(1)=\ln 1+1=1$$

מינימום $(1,\ 1)$

(3) כאשר $x\to 0^+$ האיבר $\frac{1}{x}$ שולט $\leftarrow f\to\infty$: אסימפטוטה $x=0$.

המינימום הוא $f(x)>0 \leftarrow 1$ **לכל** x **בתחום**.

את העובדה הזאת נצטרך בסעיף הבא – כדאי לשים לב למסקנות כאלה!

אותה שאלה – נגזרת כמכפלה ושטח (ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ג (2023) – מועד א' • שאלה 5

ב. $g(x)=(x+1)(1-\ln x)$: חיתוך עם ציר x, ותחומי עלייה וירידה.

$x+1>0$ בתחום ← $\ln x=1$ ← $x=e$.

$$(e,\ 0)$$

כלל המכפלה:

$$g'(x)=(1-\ln x)+(x+1)\left(-\tfrac{1}{x}\right)$$
$$=-\left(\ln x+\tfrac{1}{x}\right)=-f(x)$$

$f(x)>0$ (סעיף א), ולכן $g'(x)<0$:

g יורדת לכל $x>0$

ג. $h(x)=\frac{g'(x)}{x}$. מצאו את השטח בין h לציר x בין $x=1$ ל־$x=e$.

$$h(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x^2}<0$$

h שלילית ← השטח הוא מינוס האינטגרל:

$$S=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\tfrac{1}{2}(\ln x)^2-\tfrac{1}{x}\right]_1^e$$

$$S=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{e}\approx 1.13$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. אסימפטוטה אופקית – בודקים **כל צד בנפרד**; לפעמים יש שתיים שונות.
2. למשוואה $e^x = -1$ אין פתרון – פוסלים.
3. $\ln x$ מוגדר רק ל־$x > 0$ – גם בסקיצה!
4. $\left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$ – לא שוכחים את הנגזרת הפנימית.
5. שטח מתחת לציר x – מינוס האינטגרל.
6. קודם תשובה מדויקת, אחר כך קירוב: $\frac{3}{2} - \frac{1}{e} \approx 1.13$

בדיקה עצמית

1. פתרו: $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.
2. גזרו: $f(x) = x \cdot \ln x$.
3. מצאו את תחום ההגדרה של $f(x) = \ln(x-3)$.
4. חשבו: $\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,dx$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $t = e^x$: $t = 2$ או $t = 3$ ← $\mathbf{x = \ln 2,\ x = \ln 3}$
2. $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln \mathbf{x} + \mathbf{1}$
3. $x - 3 > 0$ ← $\mathbf{x > 3}$
4. $\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}(4-1) = \mathbf{1.5}$