מספרים מרוכבים

מצגת הסבר – הצגה קוטבית, דה־מואבר, פתרון משוואות ומישור גאוס

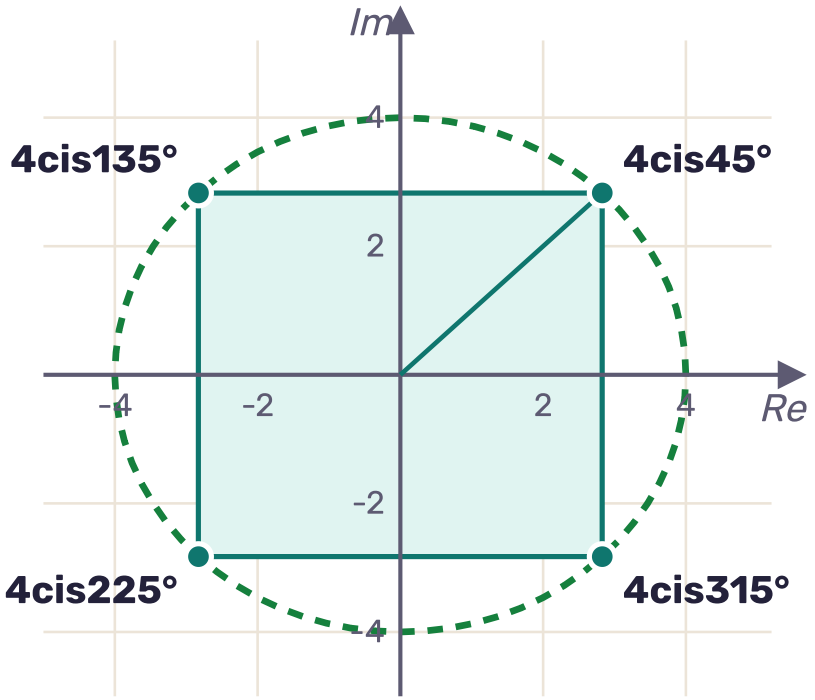
מתמטיקה 5 יח״ל | שאלון 35572 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בשאלה 3 בשאלון מבקשים בדרך כלל:

1. לעבור בין **הצגה אלגברית** $x+yi$ ל**הצגה קוטבית** $r(\cos\theta + i\sin\theta)$
2. כפל, חילוק וחזקה – **משפט דה־מואבר**
3. לפתור משוואה $z^n = w$ (**שורשים**)
4. לסמן פתרונות ב**מישור גאוס**: מצולע, שטח, סיבוב
5. **מקום גאומטרי:** $|z| = b$, חלק ממשי או מדומה נתון



הרעיונות החשובים

שתי הצגות

$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ – ובודקים **באיזה רביע** הנקודה.

לזכור (לא בנוסחאון)

קיצור: cis

$\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

למשל $\operatorname{cis}90^\circ = i$, $\operatorname{cis}180^\circ = -1$, $\operatorname{cis}270^\circ = -i$.

לזכור (לא בנוסחאון)

חילוק והופכי

$\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\operatorname{cis}(-\theta)$

לזכור (לא בנוסחאון)

גאומטריה

$|z| = b$ ← מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו b.

כפל ב־$\operatorname{cis}\alpha$ ← **סיבוב** בזווית α סביב הראשית.

$z^n = w$ ← קודקודי **מצולע משוכלל** פתרונות.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • מספרים מרוכבים

מכפלה בהצגה קוטבית של $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ו־$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

משפט דה־מואבר:

$$\left[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

פתרונות המשוואה $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$:

$$z_k = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ • במעלות: $\frac{2k\pi}{n}$ הוא $\frac{360^\circ k}{n}$

שיטת הפתרון – משוואה z בחזקת n

1. מעבירים את המשוואה לצורה $z^n = w$.
2. כותבים את w **בהצגה קוטבית**: R והזווית φ (לפי הרביע).
3. הרדיוס של כל הפתרונות: $\sqrt[n]{R}$.
4. הזוויות: $\theta_k = \frac{\varphi + 360^\circ k}{n}$ עבור $k = 0, 1, \ldots, n-1$. (בין פתרון לפתרון – הפרש קבוע של $\frac{360^\circ}{n}$.)
5. אם יש **שבר** – פוסלים פתרונות שמאפסים את המכנה.
6. אם צריך – עוברים להצגה אלגברית.

דוגמה

$$z^6 = -64i = 64\,\mathrm{cis}\,270^\circ$$

$$\sqrt[6]{64} = 2$$

$$\theta_k = \frac{270^\circ + 360^\circ k}{6} = 45^\circ + 60^\circ k$$

שישה פתרונות $2\,\mathrm{cis}(45^\circ + 60^\circ k)$ – קודקודי משושה משוכלל.

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

שיטת הפתרון – שאלות במישור גאוס

1. כל מספר $x+yi$ הוא נקודה (x,y).
2. **שטח מצולע** שקודקודיו על מעגל: מחלקים למשולשים מהראשית, $S=\frac{1}{2}\cdot r\cdot r\cdot\sin\gamma$ – γ הפרש הזוויות.
3. **סיבוב** בזווית α: כופלים כל קודקוד ב־$\operatorname{cis}\alpha$.
4. **מכפלה** של כמה מספרים: כופלים את הרדיוסים ומחברים את הזוויות.
5. מספר **ממשי** ← זווית 0° או 180°; **מדומה טהור** ← 90° או 270°.

נוסחאון • שטח משולש

$$S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha$$

(α – הזווית הכלואה בין b ל־c)

וזוויות מעל 360° מקטינים: $\operatorname{cis}540^\circ=\operatorname{cis}180^\circ$.

שאלת בגרות פתורה – הצגה קוטבית (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

$z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = \frac{1}{r}\left(\cos(\alpha+90^\circ) + i\sin(\alpha+90^\circ)\right)$,
$w = z_1 \cdot z_2 + \frac{z_1}{z_2}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $r > 0$. w מיוצג בנקודה A ששיעור ה־x שלה -1.

א. מצאו את α.

$$z_1 \cdot z_2 = \operatorname{cis}(2\alpha + 90^\circ)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = r^2\operatorname{cis}(-90^\circ) = -r^2 i$$
$$w = -\sin 2\alpha + \left(\cos 2\alpha - r^2\right) i$$

החלק הממשי של w הוא -1:

$$\sin 2\alpha = 1 \;\Rightarrow\; 2\alpha = 90^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

ב. על הישר $y = -1$ ← החלק המדומה הוא -1:

$$\cos 90^\circ - r^2 = -1 \;\Rightarrow\; r^2 = 1$$

$$r = 1$$

שאלת בגרות פתורה – משוואה ממעלה 4 (ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

ג. פתרו את המשוואה $z^4 = 128 \cdot (z_1 \cdot w)^2$.

עם $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$: $z_1 = \operatorname{cis} 45^\circ$ ו־$w = -1 - i$.

$|w| = \sqrt{2}$, ו־w ברביע השלישי, לכן:

$$w = \sqrt{2}\operatorname{cis} 225^\circ$$

$$z_1 \cdot w = \sqrt{2}\operatorname{cis} 270^\circ$$

דה־מואבר:

$$(z_1 w)^2 = 2\operatorname{cis} 540^\circ = 2\operatorname{cis} 180^\circ$$

$$z^4 = 256\operatorname{cis} 180^\circ$$

$$\sqrt[4]{256} = 4, \qquad \theta_k = \frac{180^\circ + 360^\circ k}{4}$$

$$\theta_k = 45^\circ + 90^\circ k, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$4\operatorname{cis} 45^\circ = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$

$$4\operatorname{cis} 135^\circ = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$

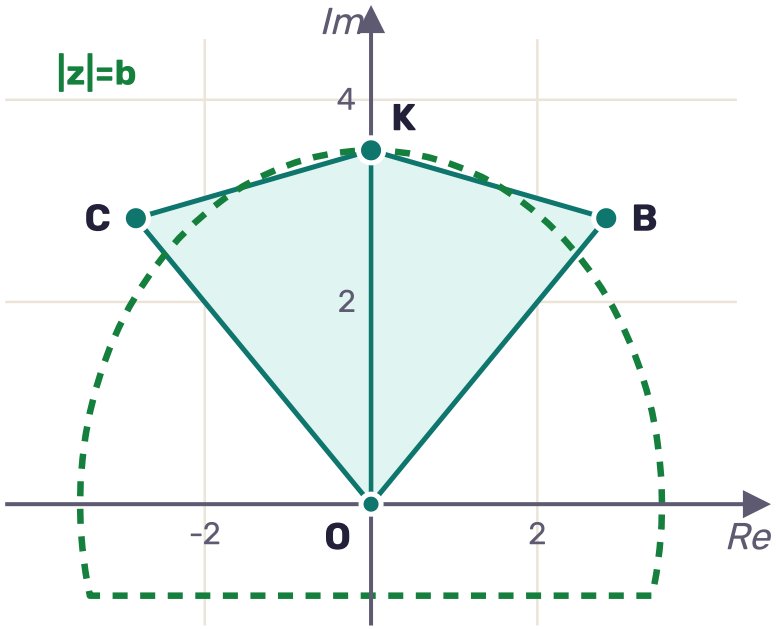
$$4\operatorname{cis} 225^\circ = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$$

$$4\operatorname{cis} 315^\circ = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$$

שאלת בגרות פתורה – מקום גאומטרי ושטח (ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

ד. B (רביע ראשון) ו־C (רביע שני) – פתרונות מסעיף ג. $|z| = b$ חותך את החלק החיובי של ציר ה־y ב־K. שטח $CKBO$ הוא $7\sqrt{2}$. מצאו את b.



$|z| = b$ – מעגל שמרכזו בראשית, ולכן $K(0, b)$.

מסעיף ג: $B(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ ו־$C(-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$.

OK מחלק את המרובע לשני משולשים עם בסיס b וגובה $2\sqrt{2}$:

$$S = 2 \cdot \frac{b \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,b$$

$$2\sqrt{2}\,b = 7\sqrt{2}$$

$$b = 3.5$$

שאלת בגרות פתורה – שורשים ומכנה

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

א. (1) פתרו $z^6+64i=0$. (2) פתרו $\dfrac{z^6+64i}{z^2-4i}=0$.

(1) בשקף 5: $z=2\,\mathrm{cis}(45^\circ+60^\circ k)$, $k=0,\dots,5$

(2) שבר שווה לאפס ← המונה 0 **והמכנה שונה מ־0**. המכנה מתאפס כאשר:

$$z^2=4i=4\,\mathrm{cis}\,90^\circ$$

$$z=2\,\mathrm{cis}\,45^\circ\quad,\quad z=2\,\mathrm{cis}\,225^\circ$$

שני אלה נפסלים. נשארים:

$$2\,\mathrm{cis}\,105^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,165^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,285^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,345^\circ$$

ב. שטח המרובע: ארבעה משולשים מהראשית, צלעות 2, זוויות 60° ו־120°:

$$S=2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin60^\circ+2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin120^\circ$$

$$S=4\sqrt{3}\approx6.93$$

אותה שאלה – סיבוב ומכפלה (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ד (2024) – מועד ב' • שאלה 3

מסובבים את המרובע סביב הראשית בזווית α נגד כיוון השעון, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. **ג.** מה מכפלת הקודקודים עבור $\alpha = 45^\circ$?

לפני הסיבוב: רדיוסים נכפלים, זוויות מתחברות:

$$2^4 \operatorname{cis}(105^\circ + 165^\circ + 285^\circ + 345^\circ) = 16 \operatorname{cis} 900^\circ = -16$$

כל קודקוד מוכפל ב־$\operatorname{cis}\alpha$:

$$P(\alpha) = 16 \operatorname{cis}(180^\circ + 4\alpha)$$

$$\alpha = 45^\circ \;\Rightarrow\; P = 16 \operatorname{cis} 360^\circ = 16$$

ד. מדומה טהור ← הזווית 270° או 450° (בתחום 180° עד 540°):

$$180^\circ + 4\alpha = 270^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 22.5^\circ$$

$$180^\circ + 4\alpha = 450^\circ \;\Rightarrow\; \alpha = 67.5^\circ$$

$$\alpha = 22.5^\circ \;\Rightarrow\; P = -16i$$

$$\alpha = 67.5^\circ \;\Rightarrow\; P = 16i$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. את הזווית קובעים **לפי הרביע**, לא רק לפי $\tan\theta$.
2. במשוואה $z^n = w$ יש בדיוק n פתרונות – k מ־0 עד $n-1$.
3. מחלקים ב־n את **כל** הזווית $\varphi + 360^\circ k$.
4. בכפל – **כופלים** רדיוסים ו**מחברים** זוויות; בחילוק – מחלקים ומחסרים.
5. בשבר שווה לאפס – פוסלים את מה שמאפס את המכנה.
6. $\sqrt[n]{R}$ – שורש של הרדיוס, לא R עצמו.

בדיקה עצמית

1. כתבו בהצגה קוטבית: $z = -1 + i$.
2. חשבו: $\left(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,15^\circ\right)^6$.
3. פתרו: $z^3 = 8i$.
4. מה המקום הגאומטרי של $|z| = 5$?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $r = \sqrt{2}$, רביע שני ← $\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,135^\circ$
2. $8\,\mathrm{cis}\,90^\circ = 8i$
3. $8i = 8\,\mathrm{cis}\,90^\circ$ ←
   $2\,\mathrm{cis}\,30^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,150^\circ,\ 2\,\mathrm{cis}\,270^\circ$
4. מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 5