גאומטרייה אנליטית

מצגת הסבר – ישר, מעגל, פרבולה, אליפסה ומקום גאומטרי

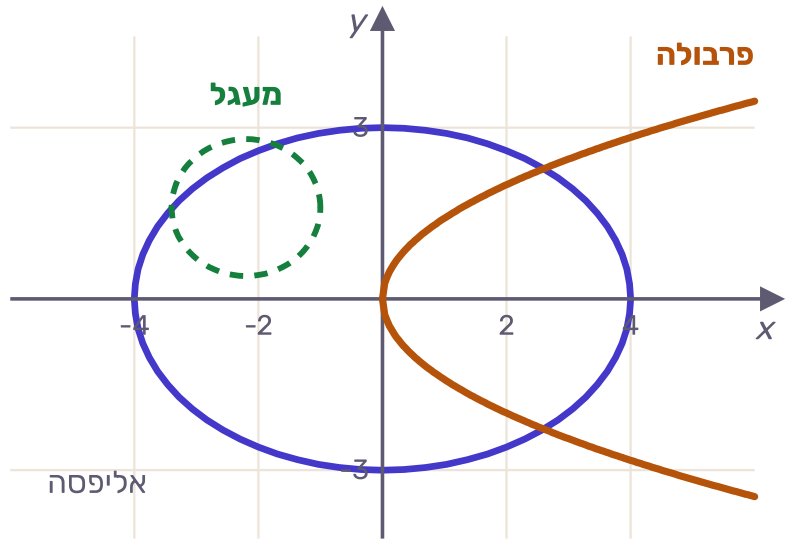
מתמטיקה 5 יח"ל | שאלון 35572 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע"י עדי והבינה

מה נלמד?

בשאלה 1 בשאלון נותנים עקומים במערכת צירים ומבקשים:

1. **משוואה** של ישר, מעגל, פרבולה או אליפסה
2. **משיק** – למעגל או לפרבולה
3. **מרחקים**: בין נקודות, מנקודה לישר, בין ישרים מקבילים
4. **מקום גאומטרי** – למצוא את המשוואה ולזהות את הצורה
5. שאלות עם **פרמטר** $(p,\ k,\ t)$ – מוצאים אותו מנתון



הרעיונות החשובים

מעגל משיק לישר

הרדיוס = **המרחק של המרכז מהישר**.

והרדיוס לנקודת ההשקה **מאונך** למשיק: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

שני מעגלים משיקים

מבחוץ: $d = R + r$ • מבפנים: $d = R - r$

(d – המרחק בין המרכזים)

לזכור (לא בנוסחאון)

מעגל בין שני ישרים מקבילים

משיק לשניהם ← **הקוטר** = המרחק בין הישרים.

לזכור (לא בנוסחאון)

משוואת מעגל

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

מרכז (a, b), רדיוס R. משוואה עם $x^2 + y^2$ ← **משלימים לריבוע**.

לזכור (לא בנוסחאון)

הנוסחאות מהנוסחאון – ישר

נוסחאון • קו ישר

שיפוע ישר דרך (x_1, y_1) ו־(x_2, y_2), $(x_1 \neq x_2)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

משוואת ישר ששיפועו m דרך (x_1, y_1):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ישרים מאונכים אם ורק אם:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

הנקודה המחלקת את AB ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$:

$$\left(\frac{\ell x_1 + k x_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + k y_2}{k + \ell} \right)$$

נוסחאון • מרחקים

בין הנקודות $A(x_1, y_1)$ ו־$B(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

בין הנקודה (x_0, y_0) לישר $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

בין הישרים המקבילים $Ax + By + C_1 = 0$ ו־$Ax + By + C_2 = 0$:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

הנוסחאות מהנוסחאון – מעגל, פרבולה, אליפסה

נוסחאון • משיקים

משיק למעגל $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ בנקודה (x_0,y_0) שעליו:

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$$

משיק לפרבולה $y^2=2px$ בנקודה (x_0,y_0) שעליה:

$$y\cdot y_0=p(x+x_0)$$

בפרבולה $y^2=2px$: מוקד $F\left(\frac{p}{2},\,0\right)$, מדריך $x=-\frac{p}{2}$

נוסחאון • אליפסה והיפרבולה

	משוואה	מוקד
אליפסה	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$c^2=a^2-b^2$
היפרבולה	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$c^2=a^2+b^2$

אסימפטוטות ההיפרבולה: $y=\pm\frac{b}{a}x$. המוקדים: $(\pm c,\,0)$.

לזכור (לא בנוסחאון): לכל נקודה על האליפסה סכום המרחקים מהמוקדים הוא $2a$.

שיטת הפתרון – מקום גאומטרי

1. מסמנים את הנקודה המבוקשת (x, y) – או בפרמטר, למשל $C(t,\ 3t)$.
2. כותבים את **התנאי** שבשאלה כמשוואה (מרחק, אמצע, משיק...).
3. מציבים בנוסחה מהנוסחאון.
4. מפשטים. עם פרמטר – **מבודדים אותו ומציבים** במשוואה השנייה.
5. **מזהים את הצורה**: ישר / מעגל (משלימים לריבוע) / אליפסה – וכותבים נקודות שיוצאות מהמקום.

דוגמה: אמצע קטע

$B(4,0)$, $C(t,\ 3t)$ על $y = 3x$. P אמצע BC:

$$x = \frac{4+t}{2}, \qquad y = \frac{3t}{2}$$

$$t = 2x - 4 \ \Rightarrow\ y = \frac{3(2x-4)}{2}$$

$$y = 3x - 6$$

המקום: ישר המקביל ל־$y = 3x$.

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 1

שיטת הפתרון – מעגל משיק

1. **המרכז**: נתון, או נמצא על ישר מסוים (למשל האנך למשיק בנקודת ההשקה).
2. **הרדיוס**: המרחק מהמרכז אל הישר המשיק (נוסחת מרחק נקודה–ישר).
3. הישר בצורה $Ax+By+C=0$ **לפני** שמציבים בנוסחה.
4. בנוסחה יש **ערך מוחלט** ← לרוב שתי אפשרויות. בודקים איזו מתאימה לשאלה.
5. כותבים $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – עם R^2, לא R.

דוגמה

מרכז $F(2,0)$, משיק לישר $x-2y+8=0$:

$$R=\frac{|2-0+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}$$

$$R^2=20$$

$$(x-2)^2+y^2=20$$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1 (עם $p=4$)

שאלת בגרות פתורה – משיק לפרבולה (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

הישר $y = x$ חותך את הפרבולה $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ בראשית ובנקודה A שברביע הראשון. **א.** הביעו באמצעות p את A. **ב.** ℓ משיק לפרבולה ב־A. מעגל שמרכזו במוקד F משיק ל־ℓ ב־B. מצאו את משוואתו.

א

$$x^2 = 2px \;\Rightarrow\; x(x-2p) = 0$$

$x = 0$ זו הראשית, ולכן $A(2p,\ 2p)$.

ב. משיק לפי הנוסחאון $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$:

$$2p \cdot y = p(x + 2p) \;\Rightarrow\; y = \tfrac{1}{2}x + p$$

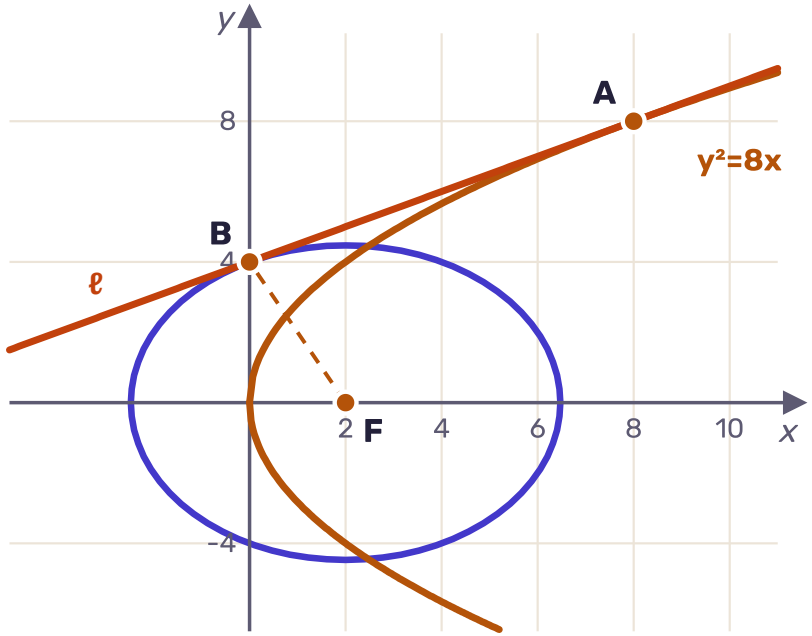
כלומר $x - 2y + 2p = 0$. המוקד $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. הרדיוס = מרחק F מ־ℓ:

$$R = \frac{\left|\frac{p}{2} + 2p\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}p$$

$$\left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \tfrac{5}{4}p^2$$

שאלת בגרות פתורה – נקודת ההשקה (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1



ג הראו כי נקודת ההשקה B נמצאת על ציר ה־y.

הרדיוס FB מאונך למשיק: שיפוע ℓ הוא $\frac{1}{2}$, ולכן שיפוע FB הוא -2.

$$FB:\ y=-2\left(x-\tfrac{p}{2}\right)=-2x+p$$

$$-2x+p=\tfrac{1}{2}x+p\ \Rightarrow\ x=0$$

$B(0,\ p)$ – על ציר ה־y

ד נתון: $AB=4\sqrt{5}$. מצאו את p.

$$AB=\sqrt{(2p)^2+(2p-p)^2}=\sqrt{5}\,p$$

$$\sqrt{5}\,p=4\sqrt{5}\ \Rightarrow\ p=4$$

$$p=4$$

שאלת בגרות פתורה – מקום גאומטרי (ה)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

ה. ($p=4$) מצאו את המקום הגאומטרי של מרכזי כל המעגלים שרדיוסם $2\sqrt{5}-3$ והמשיקים מבפנים למעגל מסעיף ב.

המעגל מסעיף ב: מרכז $F(2,0)$, $R=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 4=2\sqrt{5}\approx 4.47$.
הרדיוס $r=2\sqrt{5}-3$ קטן מ־R. משיקים מבפנים ← המרחק בין המרכזים הוא הפרש הרדיוסים:

$$d=R-r=2\sqrt{5}-\left(2\sqrt{5}-3\right)=3$$

כל המרכזים נמצאים במרחק **3** מ־$F(2,0)$ ← מעגל:

$$(x-2)^2+y^2=9$$

מקום גאומטרי של נקודות במרחק קבוע מנקודה = מעגל.

שאלת בגרות פתורה – אליפסה ומקום גאומטרי

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 1

א. המוקד הימני של אליפסה קנונית הוא $\left(\sqrt{6.4},\ 0\right)$, והנקודה $A(1,3)$ עליה. מצאו את משוואתה.

$c^2=a^2-b^2=6.4 \leftarrow a^2=b^2+6.4$. מציבים את A:

$$\frac{1}{b^2+6.4}+\frac{9}{b^2}=1$$

כופלים במכנים ומסמנים $t=b^2$:

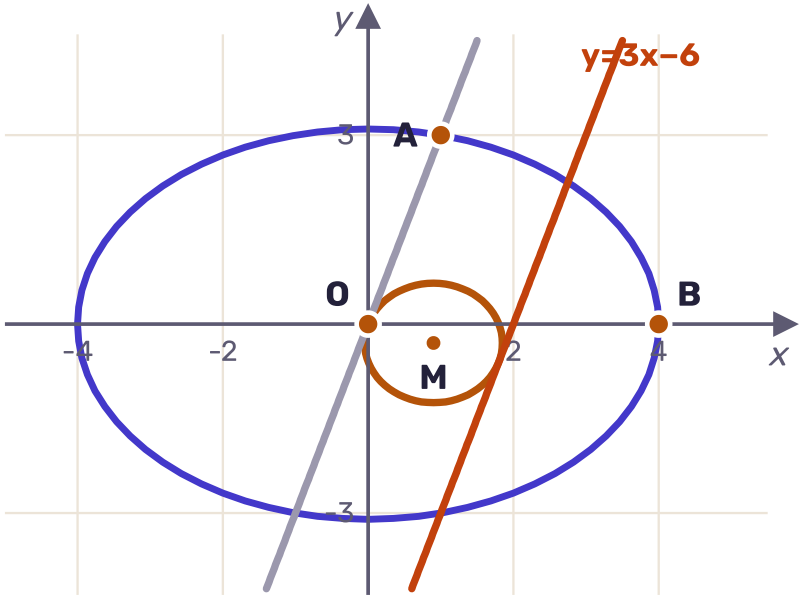
$$t^2-3.6t-57.6=0$$

$$t=\frac{3.6\pm 15.6}{2}$$

$$t_1=9.6,\qquad t_2=-6$$

$b^2>0 \leftarrow b^2=9.6,\ a^2=16$.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9.6}=1$$



אותה שאלה – מעגל המשיק לשני ישרים (ב, ג)

בגרות חורף תשפ"ו (2026) • שאלה 1

ב. P אמצע BC כאשר $B(4,0)$ ו־C על הישר AO. (הדרך – בשקף 6.)

$$y = 3x - 6$$

ג. מצאו מעגל המשיק לישר AO בנקודה O ומשיק גם למקום הגאומטרי.

הישרים $3x - y = 0$ ו־$3x - y - 6 = 0$ מקבילים. המעגל משיק לשניהם ← הקוטר הוא המרחק ביניהם:

$$d = \frac{|0 - (-6)|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} \;\Rightarrow\; R^2 = 0.9$$

המרכז על האנך ל־AO בנקודה O: $y = -\frac{1}{3}x$, כלומר $M\left(m,\ -\frac{m}{3}\right)$, $m > 0$ (בצד של הישר השני).

$$m^2 + \frac{m^2}{9} = 0.9 \;\Rightarrow\; m = 0.9$$

בדיקה: מרחק $M(0.9, -0.3)$ מ־$3x - y - 6 = 0$ הוא $R = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ✓

$$(x - 0.9)^2 + (y + 0.3)^2 = 0.9$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. בנוסחת המרחק מנקודה לישר – קודם מעבירים לצורה $Ax+By+C=0$.
2. לא שוכחים את **הערך המוחלט** ואת שתי האפשרויות.
3. במשוואת המעגל באגף ימין R^2, לא R.
4. אליפסה: $c^2=a^2-b^2$. היפרבולה: $c^2=a^2+b^2$.
5. בפרבולה $y^2=2px$ המוקד $\left(\frac{p}{2},0\right)$ – לא $(p,0)$.
6. מקום גאומטרי: מזהים את הצורה במילים, ומוציאים נקודות שלא מתאימות.

בדיקה עצמית

1. מצאו את מרכז המעגל $x^2-6x+y^2+4y=12$ ואת רדיוסו.
2. מצאו את המרחק של הנקודה $(1,2)$ מהישר $3x+4y+4=0$.
3. מצאו את המשיק לפרבולה $y^2=8x$ בנקודה $(2,4)$.
4. אליפסה $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ – מצאו את המוקדים.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ ← מרכז $(\mathbf{3},\mathbf{-2})$, רדיוס $\mathbf{5}$
2. $d=\frac{|3+8+4|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=\mathbf{3}$
3. $p=4$: $4y=4(x+2)$ ← $\mathbf{y=x+2}$
4. $c^2=25-9=16$ ← $(\mathbf{\pm4},\ \mathbf{0})$